TITLE:

Cayley-Hamilton type theorems of higher order and second fundamental theorems of invariant theory (Research on finite groups and their representations, vertex operator algebras, and algebraic combinatorics)

AUTHOR(S):

伊藤, 稔

CITATION:

伊藤, 稔. Cayley-Hamilton type theorems of higher order and second fundamental theorems of invariant theory (Research on finite groups and their representations, vertex operator algebras, and algebraic combinatorics). 数理解析研究所講究録 2014, 1926: 122-131 ...

ISSUE DATE:

2014-12

URL:

http://hdl.handle.net/2433/223497

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第1926巻 2014年 122-131

Cayley–Hamilton type theorems of higher order and second fundamental theorems of invariant theory

伊藤稔（鹿児島大学理学部）
Minoru ITOH (Faculty of Science, Kagoshima University)

序文

不変式論の第二基本定理が Cayley–Hamilton 定理やその高階の類似物で記述可能な不変式環について報告する.

通常の Cayley–Hamilton 定理は $A_1=\mathcal{P}(V\otimes V^*)\otimes V\otimes V^*$ という代数の $GL(V)$-不変元のなす不変式環に関する第二基本定理と見なせる（ここで V は n 次元複素ベクトル空間とする）．つまり不変式環 $A_1^{GL(V)}$ は $\mathbb{C}$ 代数としては $n+1$ 個の元から生成されて, トレース付き代数としてはひとつの元から生成されるが, いずれにしてもその関係式は実質的に通常の Cayley–Hamilton 定理で尽きるのである.

同様に, $A_q=\mathcal{P}(V\otimes V^*)\otimes(V\otimes V^*)^{\otimes q}$ という代数の $GL(V)$-不変元のなす不変式環も, その第二基本定理が Cayley–Hamilton 定理の類似で記述できる. この不変式環 $A_q^{GL(V)}$ も単一の元から生成されて, その関係式は実質的にこの Cayley–Hamilton 型定理で尽きるのである（ただしトレースに似た構造をもつ代数の枠組みで）. この Cayley–Hamilton 型定理は阿賀岡芳夫 [A] によって与えられたもので, 本稿では「高階の Cayley–Hamilton 定理」と呼ぶ.

実際には A_q だけでなく, ある系列の代数において不変式論の第二基本定理がこの高階の Cayley–Hamilton 定理で記述できる. このうちもっとも本質的なのがこの A_q の不変式論ということになる.

1. 高階の Cayley–Hamilton 定理

本稿で中心的な役割をはたす高階の Cayley–Hamilton 定理を述べておく.

まず通常の Cayley–Hamilton 定理は次のような等式だった:

定理 1.1. 成分が互いに可換な n 次正方行列 Z に対して次がなりたつ:

$$\sum_{k+l=n}(-)^k\det_k(Z)Z^l=0.$$

ただし $\det_k(Z)$ を次のように定める:

$$\det_k(Z) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \det(Z_{i_a i_b})_{1 \leq a,b \leq k}.$$

これを一般化した次の等式がなりたつ:

定理 1.2 ([A]). 非負整数 q を固定する. 成分が互いに可換な n 次正方行列 Z に対して次がなりたつ:

$$\sum_{k+l_1+\cdots+l_q=n+1-q} (-)^k \det_k(Z) Z^{l_1} \otimes \cdots \otimes Z^{l_q} \sum_{\sigma \in S_q} \mathrm{sgn}(\sigma)\gamma(\sigma) = 0.$$

ただし $\gamma(\sigma)$ を次のように定める（E_{ij} は行列単位）:

$$\gamma(\sigma) = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_q \leq n} E_{i_{\sigma(1)} i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_{\sigma(q)} i_q}.$$

これを本稿では「高階の Cayley–Hamilton 定理」と呼ぼう. $q = 1$ のときが通常の Cayley–Hamilton 定理である.

2. A_0, A_1 の不変式論

代数 A_q について調べる前に, その特別な場合である A_0 や A_1 の不変式論を整理しておこう.

V を n 次元複素ベクトル空間とする. 非負整数 q に対して, 代数 A_q を

$$A_q = \mathcal{P}(V \otimes V^*) \otimes (V \otimes V^*)^{\otimes q}$$

と定める. $A_0, A_1, \ldots$ のあいだには次のような自然な包含関係がある:

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots.$$

この包含関係は $GL(V)$ の作用と両立するから, さらに次のような不変式環の包含関係を得る:

$$A_0^{GL(V)} \subset A_1^{GL(V)} \subset A_2^{GL(V)} \subset \cdots.$$

以下 $e_1, \ldots, e_n$ を V の基底, $e_1^*, \ldots, e_n^*$ をその双対基底とする. また z_{ij} をこれから自然に決まる $V \otimes V^*$ の座標とする.

まず $A_0 = \mathcal{P}(V \otimes V^*)$ について見よう. A_0 の $GL(V)$-不変元は要するに「正方行列の行列成分の多項式で conjugation で不変なもの」であり, これらは固有多項式の係数 $\omega_1, \ldots, \omega_n$ から生成され, この n 個の生成元は代数的に独立である. これで生成元とその関係式が決定できたことになる. 具体的には生成元は $\omega_k = \det_k(Z)$ と表される. ただし Z を

$Z = (z_{ij})_{1\le i,j\le n}$ という A_0 の元を成分とする n 次正方行列とする．この $Z \in \mathrm{Mat}_n(A_0)$ は $A_1 = A_0 \otimes V \otimes V^*$ の元と見なすこともできる:

$$Z = \sum_{i,j=1}^{n} z_{ij} \otimes e_i \otimes e_j^*.$$

次に A_1 の $GL(V)$-不変元について考えよう．$A_0^{GL(V)} \subset A_1^{GL(V)}$ だから $\omega_1, \dots, \omega_n \in A_0^{GL(V)}$ は $A_1^{GL(V)}$ の元であり，これ以外に $Z \in A_1$ も $GL(V)$-不変元である．実はこれで $GL(V)$-不変元は実質的に尽きる:

定理 2.1. $A_1^{GL(V)}$ は $\mathbb{C}$ 代数として $\omega_1, \dots, \omega_n, Z$ で生成される:

これら生成元の関係式としては Cayley–Hamilton 定理があるが，実はこれからすべての関係式が生成される:

定理 2.2. $\omega_1, \dots, \omega_n, Z$ の関係式は Cayley–Hamilton 定理で尽きる．

$A_1^{GL(V)}$ に関するこれらの結果は，あとで述べるようにトレース付き代数の枠組みでもっと簡潔に書くことができる．

3. Diagram

トレース付き代数の説明の前に Diagram を導入しておく．

3.1. 行列を「矢尻」と「矢羽」をもつ図形として表す（矢尻と矢羽はそれぞれ V と V^* の元に当たる）．また行列成分は矢尻と矢羽に添字をつけて表す．たとえば行列 Z とその (i,j) 成分 z_{ij} は次のように表そう:

$$Z = \longleftarrow\!\bullet\!\!\longrightarrow\!\!\!\!<, \qquad z_{ij} = \underset{i}{\longleftarrow}\!\bullet\!\!\underset{j}{\longrightarrow\!\!\!\!<}.$$

次に「矢尻と矢羽の融合」という記法を導入する．「$-\!\!\!\longleftarrow$」という矢尻と矢羽の融合した状態を次のように定めるのである:

$$\longrightarrow\!\!\!\!\!<\!\!\!\longleftarrow \;=\; \sum_{i=1}^{n} \underset{i}{\longrightarrow\!\!\!\!<}\;\underset{i}{\longleftarrow}.$$

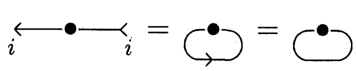
つまり，一般に「矢尻と矢羽の融合」は「矢尻と矢羽に同じ添字をつけて，その添字を 1 から n まで動かして和をとる」という意味とする．本質的にはこれは V と V^* のカップリングと見なせる．またこの矢尻と矢羽の融合した状態「$-\!\!\!\longleftarrow$」を単に「——」と略記する．

この記法を用いると，行列 A, B の積は A の矢羽と B の矢尻の融合で表される．たとえば Z^2 は次のように表せる:

$$Z^2 = \longleftarrow\!\bullet\!\!\longrightarrow\!\!\!\!\!<\!\!\!\longleftarrow\!\bullet\!\!\longrightarrow\!\!\!\!< \;=\; \longleftarrow\!\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\!\!\longrightarrow\!\!\!\!<.$$

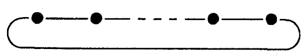
またトレースは次のように表せる:

$$\operatorname{tr} Z = \sum_{i=1}^{n} z_{ii} = \sum_{i=1}^{n}$$



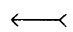
さらに $\operatorname{tr}(Z^k)$ は長さ k の cycle として次のように表される（ただしここに $\bullet$ が k 個あるものとする）:

$$\operatorname{tr}(Z^k) =$$

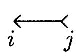


また単位行列 1 やクロネッカーのデルタは次のように表せる:

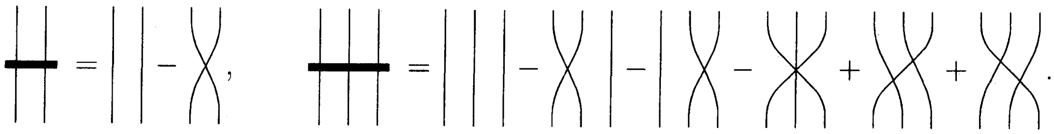
$$1 =$$



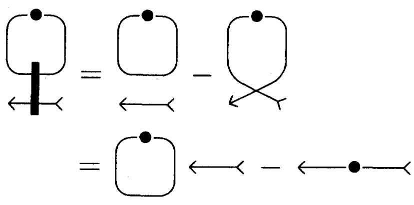
$$\delta_{ij} =$$



3.2. さらに交代和の記法を導入する. k 本の線を横切る太い線で「k 本の線を $k!$ 通りにつなぎかえて交代和をとる」という意味とするのである. たとえば $k = 2, 3$ のときは次のようになる:



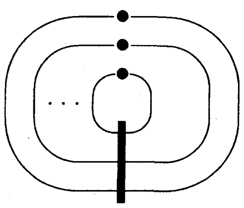
具体的な適用例をあげよう:



$$= \operatorname{tr}(Z)1 - Z.$$

この記法で, 小行列式の和 $\det_k$ は次のように表される（ただしここに $\bullet$ は k 個あるものとする）:

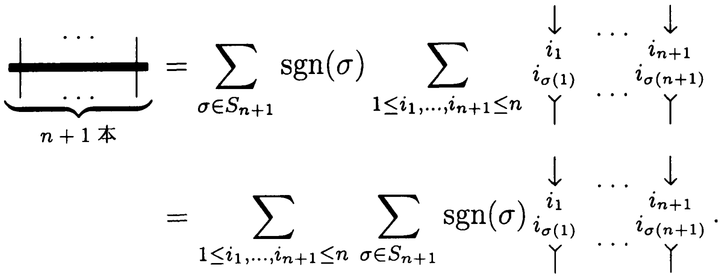
$$\det_k(Z) = \frac{1}{k!} \sum_{1 \le i_1, \dots, i_k \le n} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) z_{i_1 i_{\sigma(1)}} \cdots z_{i_k i_{\sigma(k)}} = \frac{1}{k!}$$



右辺の交代和を計算すると, $\det_k(Z)$ を $\operatorname{tr}(Z^1), \dots, \operatorname{tr}(Z^k)$ の積和で表す公式が得られる.

この交代和の記法に関して重要なのが,「$n+1$ 本（以上）の交代和は 0」という事実である. これが不変式環の第二基本定理の基盤になる. この事実自体の証明は易しい. 実際,

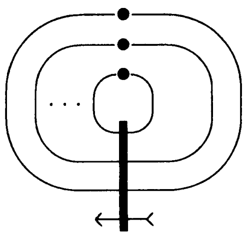
$n+1$ 本の交代和を次のように書き直せばよい:



$i_1, \dots, i_{n+1}$ には重複が生じるから, 内側の交代和は 0 になる.

3.3. 交代和の記法を用いて Cayley–Hamilton 定理やその類似も簡潔に表せる.

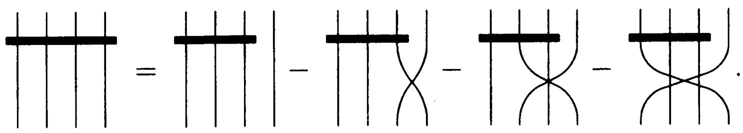
まず通常の Cayley–Hamilton 定理（定理 1.1）は次のような diagram の等式として表される（ただしここに $\bullet$ は n 個あるとする）:

(3.1) $\frac{1}{n!}$  $= 0.$

左辺の diagram が 0 に等しいのは, これが $n+1$ 本の交代和だからである. また左辺の交代和は次のように変形できる（これでこの等式が Cayley–Hamilton 定理と同値とわかる）:

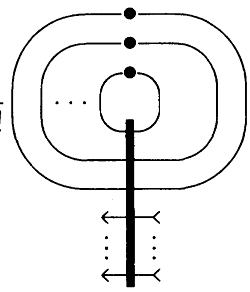
(3.2)
$$\sum_{p+q=n} (-)^q \det_p(Z) Z^q.$$

この変形の鍵になるのが交代和の記法に関する「余因子展開」である. 「n 本の交代和」は「$n-1$ 本の交代和」の n 個の和で表せるが, これは一種の余因子展開と見なせる. たとえば $n=4$ の場合は次のようになる:



この「余因子展開」をくりかえし適用すれば (3.1) の左辺が (3.2) に等しいことがわかる.

高階の Cayley–Hamilton 定理（定理 1.2）も同様に次の diagram の等式で表せる（証明は省略）:

(3.3) $\frac{1}{(n+1-q)!}$  $= 0.$

ただしこの図には $n+1-q$ 個の $\bullet$ と q 個の $\longleftarrow\!\!<$ があるとする[1].

3.4. この種の diagram の歴史については [C] の 4.9 節にくわしい. この種の diagram は tensor diagrams, birdtracks, arrow diagrams などの名前で呼ばれている. 矢尻や矢羽の記法は 19 世紀から使われていたようだが, 太い線による交代和の記法は物理学者の Penrose によって導入されたものらしい.

4. トレース付き代数

A_1 の不変式論はトレース付き代数の枠組みでまとめるとわかりやすい.

定義 4.1. $\mathbb{C}$ 代数 A と線型写像 $\mathrm{tr}\colon A \to A$ が, 任意の $a, b \in A$ に対して次の条件をみたすとき (A, tr) はトレース付き代数であるという:

(i) $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba)$.

(ii) $\mathrm{tr}(\mathrm{tr}(a)b) = \mathrm{tr}(a)\,\mathrm{tr}(b)$.

(iii) $\mathrm{tr}(a)b = b\,\mathrm{tr}(a)$.

トレース付き代数の元 a に対しては, トレースの他に $\det_k(a)$ も自然に定義できる ($\det_k(Z)$ を $\mathrm{tr}(Z^1), \ldots, \mathrm{tr}(Z^k)$ で表したのと同じ式で, $\det_k(a)$ を $\mathrm{tr}(a^1), \ldots, \mathrm{tr}(a^k)$ で定義する).

ただ一つの元 $\bar{Z}$ から生成されるトレース付き代数としての自由代数 $\bar{A}_1$ を考えよう. $\bar{\varphi}_k = \mathrm{tr}(\bar{Z}^k)$ とおくと, $\bar{A}_1$ は次のように表せる:

$$\bar{A}_1 = \mathbb{C}[\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_1, \ldots] \otimes \mathbb{C}[\bar{Z}].$$

この $\bar{A}_1$ を使うと A_1 の不変式論は次のようにまとめられる:

定理 4.2. トレース付き代数として次の等式がなりたつ:

$$A_1^{GL(V)} \simeq \bar{A}_1/(\overline{\mathrm{CH}}_n, \bar{\varphi}_0 - n).$$

ただし $\overline{\mathrm{CH}}_n$ は Cayley–Hamilton 定理の左辺を表す. つまり次のように定める:

$$\overline{\mathrm{CH}}_n = \sum_{k+l=n} (-)^k \det_k(\bar{Z}) \otimes \bar{Z}^l.$$

またイデアルはトレース付き代数としてのイデアルである:

定義 4.3. トレース付き代数 $A = (A, \mathrm{tr})$ に対して, I が次の条件をみたすとき, I はトレース付き代数としての A のイデアルであるという:

(i) I は A の $\mathbb{C}$ 代数としてのイデアル.

(ii) $\mathrm{tr}(A) \subset A$.

[1] このままではこの diagram はすこし説明不足である. 矢尻と矢羽が複数個あるため, これらを区別するラベルづけが本当は必要である.

5. A_q の不変式論

ここまでの議論を踏まえて $A_q = \mathcal{P}(V \otimes V^*) \otimes (V \otimes V^*)^{\otimes q}$ の不変式論を考えよう.

まず $\mathbb{C}$ 代数の枠組みで考えると, 不変式論の第一・第二基本定理として次がなりたつ:

定理 5.1. 次がなりたつ:

$$A_q^{GL(V)} = \langle \varphi_1^{k_1} \cdots \varphi_n^{k_n} Z^{l_1} \otimes \cdots \otimes Z^{l_q} \gamma(\sigma) \mid k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_q \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \sigma \in S_q \rangle.$$

ただし $\varphi_k = \mathrm{tr}(Z^k)$ とする. つまり $\mathbb{C}$ 代数として, $A_q^{GL(V)}$ は $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, Z, さらに $\sigma \in S_q$ に対する $\gamma(\sigma)$ から生成される.

定理 5.2. $\mathbb{C}$ 代数として, 関係式は $\mathrm{CH}_n^1, \dots, \mathrm{CH}_n^q$ で尽きる.

ただし CH_n^q は高階の Cayley–Hamilton 定理の左辺である. つまり非負整数 q に対して CH_n^q を次のように定める:

$$\mathrm{CH}_n^q = \sum_{k+l_1+\cdots+l_q=n+1-q} (-)^k \det{}_k(Z) Z^{l_1} \otimes \cdots \otimes Z^{l_q} \sum_{\sigma \in S_q} \mathrm{sgn}(\sigma)\gamma(\sigma).$$

この不変式論の第二基本定理をトレース付き代数に似た代数の枠組みで書き直そう.

まず線型写像 $\mathrm{tr}' \colon A_q \to A_{q-1}$ を $a \otimes v \otimes v^* \mapsto \langle v^*, v \rangle a$ と定める（ここで a は A_{q-1} の元）. これは diagram で表したときに「q 本の矢尻と矢羽のうち最後のもの同士を融合させる」という操作に当たる. 高階の Cayley–Hamilton 定理は (3.3) と表されるから, CH_n^{q-1} はこの写像による CH_n^q の像に等しい（スカラー倍を無視すれば）.

次にこの写像 tr' を備えた代数の枠組みで自由代数に当たるものを考える. まず wreath 積を用いて次のような代数 F_q を定義する:

$$F_q = \mathbb{C}[\bar{Z}] \wr S_q = \mathbb{C}[\bar{Z}]^{\otimes q} \otimes \mathbb{C}S_q.$$

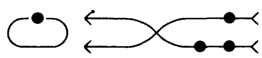
積は次のように定める:

$$\bar{Z}^{k_1} \otimes \cdots \otimes \bar{Z}^{k_q} \otimes \sigma \cdot \bar{Z}^{l_1} \otimes \cdots \otimes \bar{Z}^{l_q} \otimes \tau = \bar{Z}^{k_{\tau(1)}+l_1} \otimes \cdots \otimes \bar{Z}^{k_{\tau(q)}+l_q} \otimes \sigma\tau.$$

さらに次のような代数 $\bar{A}_q$ を考える:

$$\bar{A}_q = \mathbb{C}[\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_1, \dots] \otimes F_q.$$

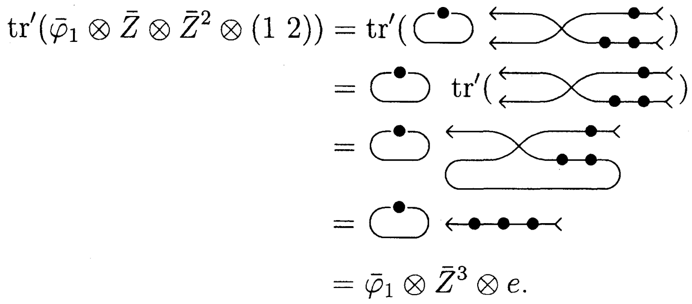
F_q や $\bar{A}_q$ の元は diagram で自然に表せる. たとえば $\bar{\varphi}_1 \otimes \bar{Z} \otimes \bar{Z}^2 \otimes (1\ 2) \in \bar{A}_2$ は



と表すことができる. すると写像 $\mathrm{tr}' \colon \bar{A}_q \to \bar{A}_{q-1}$ が自然に考えられる. これは「$\bar{A}_q$ の元の q 本の矢尻と矢羽のうち最後のもの同士を融合させる」という写像である. たとえば

$$\mathrm{tr}'(\bar{\varphi}_1 \otimes \bar{Z} \otimes \bar{Z}^2 \otimes (1\ 2)) = \bar{\varphi}_1 \otimes \bar{Z}^3 \otimes e$$

となるが, これは diagram で次のように計算することができる:



ただし e は恒等置換とする.

これらの概念を利用して, 不変式論の第二基本定理は次のように整理できる:

定理 5.3. tr' 付き代数として,

$$A_q^{GL(V)} \simeq \bar{A}_q/(\overline{\mathrm{CH}}_n^q, \bar{\varphi}_0 - n).$$

ただしイデアルは tr' 付き代数として生成されるイデアルを考えている. また $\overline{\mathrm{CH}}_n^q$ は高階の Cayley–Hamilton 定理の左辺である. つまり非負整数 q に対して $\overline{\mathrm{CH}}_n^q$ を次のように定める:

$$\overline{\mathrm{CH}}_n^q = \sum_{k+l_1+\cdots+l_q=n+1-q} (-)^k \det_k(\overline{Z}) \otimes \bar{Z}^{l_1} \otimes \cdots \otimes \bar{Z}^{l_q} \otimes \sum_{\sigma \in S_q} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma.$$

以上の第一・第二基本定理は, ベクトル不変式に関する不変式論の第一・第二基本定理 ([GW], [P]) から導くことができる. 本稿では, その詳細は省略する.

6. 背景

実際には A_q だけでなく, ある系列の代数において不変式論の第二基本定理が高階の Cayley–Hamilton 定理で記述できる. このうちもっとも本質的なのがこの A_q の不変式論ということになる.

6.1. 次の不変環の第二基本定理はやはり高階の Cayley–Hamilton 定理を用いて表すことができる:

$$\mathcal{P}(V \otimes V^* \oplus mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)}.$$

ただし kU は U の k 個のコピーの直和である.

$m = m^* = 0$ のときは, 簡単である. これは $A_0 = \mathcal{P}(V \otimes V^*)$ の $GL(V)$-不変元だから 1 節で述べたように n 個の元から生成されて, この n 個の元は代数的に独立となる. しかし m, m^* が一般のときは, もうすこし複雑である.

z_{ij} をこれまでと同様に $V\otimes V^*$ の標準的な座標とする. さらに $x_i^{(a)}$ と $x_i^{*(a^*)}$ をそれぞれ a 番目の V と a^* 番目の V^* の座標とする. これらを用いて次の形式的な行列を作る:

$$Z=(z_{ij})_{1\le i,j\le n},\qquad x^{(a)}={}^t(x_1^{(a)},\dots,x_n^{(a)}),\qquad x^{*(a^*)}={}^t(x_1^{*(a^*)},\dots,x_n^{*(a^*)}).$$

すると $\mathcal{P}(V\otimes V^*\oplus mV\oplus m^*V^*)$ の次の元は $GL(V)$-不変である:

$$\omega_k=\det_k(Z),\qquad \varphi_k=\mathrm{tr}(Z^k),\qquad \psi_l^{a^*a}={}^t x^{*(a^*)}Z^l x^{(a)}.$$

$\omega_1,\dots,\omega_n$ と $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ はどちらも $\mathcal{P}(V\otimes V^*)^{GL(V)}$ の生成系となる.

不変式論の第一基本定理は次のように表される:

定理 6.1. $\mathcal{P}(V\otimes V^*\oplus mV\oplus m^*V^*)^{GL(V)}$ は ω_k および $\psi_l^{a^*a}$ で生成される. ただし k, l, a, a^* は次の範囲を動く:

$$k=1,\dots,n,\qquad l=0,\dots,n-1,\qquad a^*=1,\dots,m^*,\qquad a=1,\dots,m.$$

このうち $\omega_1,\dots,\omega_n$ は $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ に置き換えてもよい.

そして第二基本定理は高階の Cayley–Hamilton 定理（定理 1.2）を用いて書くことができる. 定理 1.2 に左と右からそれぞれ

$${}^t x^{*(a_1^*)}Z^{\eta_1^*}\otimes\cdots\otimes{}^t x^{*(a_q^*)}Z^{\eta_q^*},\qquad Z^{\eta_1}x^{(a_1)}\otimes\cdots\otimes Z^{\eta_q}x^{(a_q)}$$

という元を掛けると次のような ω_k, $\psi_l^{a_i^*a_j}$ たちの関係式を得る:

$$\sum_{k+l_1+\cdots+l_q=n+1-q}(-)^k\omega_k\sum_{\sigma\in S_q}\mathrm{sgn}(\sigma)\psi^{a_1^*a_{\sigma(1)}}_{\eta_1^*+l_1+\eta_{\sigma(1)}}\cdots\psi^{a_q^*a_{\sigma(q)}}_{\eta_q^*+l_q+\eta_{\sigma(q)}}=0. \tag{6.1}$$

本質的に ω_k, $\psi_l^{a_i^*a_j}$ たちの関係式はこれらで尽きるのである.

このしくみをより直接的に再現したのが, 本稿で扱った A_q の不変式論ということになる.

この不変式環以外にも, 次の 2 つの不変式環はやはり定理 1.2 を用いて第二基本定理が記述できる:

$$\mathcal{P}(S_2(V)\oplus S_2(V^*)\oplus mV\oplus m^*V^*)^{GL(V)},\qquad \mathcal{P}(S_2(V)\oplus mV)^{O(V)}.$$

6.2. 定理 1.2 以外の Cayley–Hamilton 型定理を用いて, 第二基本定理が記述できる不変式環もある.

たとえば次の 2 つの不変式環は Pfaffian 版の Cayley–Hamilton 型定理の高階版（[D], [I1] で与えられた Cayley–Hamilton 型定理の一般化）を用いて第二基本定理が記述できる:

$$\mathcal{P}(S_2(V)\oplus mV)^{Sp(V)},\qquad \mathcal{P}(\Lambda_2(V)\oplus mV)^{Sp(V)}.$$

これを A_q のような形でまとめようとすると, 「トレース付きの加群」のようなものを考えることになる.

さらに次の 3 つの不変式環もやはり一種の Cayley–Hamilton 型定理を用いて第二基本定理が記述できる:

$$\mathcal{P}(\Lambda_2(V) \oplus \Lambda_2(V^*) \oplus mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)},$$

$$\mathcal{P}(S_2(V) \oplus \Lambda_2(V^*) \oplus mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)}, \qquad \mathcal{P}(\Lambda_2(V) \oplus mV)^{O(V)}.$$

6.1 節と 6.2 節であげた 8 系列の不変式環はいずれも diagram で表したときに,「(長さだけで決まる) cycle と (長さと端点のデータだけで決まる) path で不変式が生成される」という共通点を持つ. 最初に述べた $\mathcal{P}(V \otimes V^* \oplus mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)}$ の生成元も, φ_k は長さ k の cycle として表され, $\psi_l^{a^*a}$ は両端に a^*, a というラベルのついた長さ l の path として表される.

6.3. 外積代数の枠組みでも似た議論ができる.

[I2] では, $V \otimes V^*$ 上の外積代数 $\Lambda(V \otimes V^*)$ や $\Lambda(V \otimes V^*) \otimes V \otimes V^*$ における $GL(V)$-不変元を調べている. 言わば A_0, A_1 の反可換版である. A_0, A_1 の $GL(V)$-不変元は $\mathrm{tr}(Z^k)$ や Z で生成されたが, $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$, $(\Lambda(V \otimes V^*) \otimes V \otimes V^*)^{GL(V)}$ も同様である. そして生成元のあいだの関係式 (実際には, ある次数以上のものが不要になるという情報) はやはり Cayley–Hamilton 型の定理で与えられる (言わば反可換版の Cayley–Hamilton 定理).

[I2] では高階のものは扱ってないが, この反可換版の Cayley–Hamilton 型の定理の高階版を考えることも意味があるだろう.

References

[A] Y. Agaoka, *On Cayley-Hamilton's theorem and Amitsur-Levitzki's identity*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **63**, (1987), no. 3, 82–85.

[C] P. Cvitanović, Group theory: Birdtracks, Lie's, and exceptional groups, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.

[D] D. Ž. Đoković, *On the product of two alternating matrices*, Amer. Math. Monthly **98** (1991), no. 10, 935–936.

[GW] R. Goodman and N. R. Wallach, Symmetry, representations, and invariants, Springer, 2009.

[I1] M. Itoh, *A Cayley–Hamilton theorem for the skew Capelli elements*, J. Algebra **242** (2001), no. 2, 740–761.

[I2] ———, *Invariant theory in exterior algebras and Amitsur–Levitzki type theorems*, preprint 2014, arXiv:1404.1980.

[P] C. Procesi, Lie groups. An approach through invariants and representations, Universitext. Springer, New York, 2007.